Koło matematyczne.

zestaw 8/2015

1. Niech $a > 1$ będzie liczbą naturalną. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, będące dzielnikami przynajmniej jednej z liczb $a_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Dane są liczby całkowite dodatnie k, n. Znaleźć wszystkie liczby nieujemne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające układ równań:
$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = 1 \\ (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) = 2. \end{cases}$$

3. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego do boku AC a punkt E jest środkiem boku AC. Udowodnić, że środek odcinka BD należy do prostej EO.

4. Znaleźć minimalną liczbę wież, które można ustawić na trójwymiarowej szachownicy $n \times n \times n$ w taki sposób, aby każde puste pole było atakowane przez jakąś wieżę.

5. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wykaż, że równanie
$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}$$
ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez sześcian liczby całkowitej większej od 1.

6. Udowodnij, że dla $n \geq 3$ liczbę 2^n można przedstawić w postaci
$$2^n = 7x^2 + y^2,$$
gdzie liczby x, y są nieparzyste.