

**Koło matematyczne.**  
zestaw 9/2015/2016

1. Dane są takie liczby całkowite dodatnie  $a, b$ , że liczba

$$\frac{a^2 - b^2}{ab}$$

jest całkowita. Wykaż, że  $a = b$ .

2. Niech  $M$  będzie 10-elementowym podzbiorem zbioru  $\{1, 2, \dots, 99\}$ . Udowodnij, że zbiór  $M$  ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory  $A$  i  $B$ , że suma elementów zbioru  $A$  jest równa sumie elementów zbioru  $B$ .
3. W wielościanie wypukłym, w który da się wpisać kulę, pomalowano ściany na zielono i na niebiesko, w ten sposób, że żadne dwie ściany o tym samym kolorze nie mają wspólnej krawędzi. Udowodnić, że łączna powierzchnia ścian zielonych jest tak sama jak niebieskich.
4. Dany jest chodnik zbudowany z kwadratowych płytek. Odległość pomiędzy początkiem jednej płytki a początkiem drugiej wynosi 1 metr. Szpara pomiędzy płytkami ma grubość  $\epsilon$ . Czy można tak dobrać długość kroku żeby czubkiem buta nie wejść w szparę? Spacer rozpoczynamy z pozycji gdy czubek buta jest w szparze.
5. Dane są liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Udowodnić, że:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{4}.$$

6. Ostrosłup ścięty prawidłowy ma kulę wpisaną oraz kulę styczną do wszystkich krawędzi. Wyznacz liczbę wierzchołków oraz skalę podobieństwa podstaw ostrosłupa.